§4. Estimation L^2 a priori

Rappel : $\mathbb{E}\left[\langle W^{\varepsilon}_{\psi^{main}_{\cdot\cdot}(t)}, J\rangle\right] = \sum_{n,n'=0}^{N-1} \sum_{\pi\in\Pi_{n,n'}} C_\pi^{\hat{J}_\varepsilon}$,

où

$$(4.1)\quad C_\pi^{\hat{J}_\varepsilon} := \lambda^{n+n'} \int d\xi\, d\nu\, \overline{\hat{J}_\varepsilon(\xi,\nu)} \int d\vec{p}_n\, d\vec{p}'_{n'}\, \overline{K(t,\vec{p},n)}\, K(t,\vec{p}',n')$$
$$\times \Delta_\pi(\vec{p},\vec{p}')\cdot \delta\left(p_0-\nu+\tfrac{\xi}{2}\right)\delta\left(p_0'-\nu-\tfrac{\xi}{2}\right)$$
$$\times \prod_{j=0}^{n-1} \overline{R}(p_j-p_{j+1})\,\overline{\hat{\psi}_0(p_n)}\cdot \prod_{j=0}^{n'-1} R(p_j'-p_{j+1}')\,\hat{\psi}_0(p_{n'}')$$

$$(4.2)\quad K(t,\vec{p},n) = \frac{i}{2\pi} e^{t\eta} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\alpha t} \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\alpha - \frac{p_j^2}{2} + i\eta}, \quad \eta=\frac{1}{t}$$

---

pour comprendre les tailles typiques de $C_\pi^{\hat{J}_\varepsilon}$, on commence à regarder $C_\pi = C_\pi^{\delta(\xi)}$,

$$\|\psi_n(t)\|_{L^2}^2 = \sum_{\pi\in\Pi_{n,n}} C_\pi$$

$$(4.3)\quad C_\pi = \lambda^{2n} \int d\vec{p}_n\, d\vec{p}'_{n'}\, \overline{K(t,\vec{p},n)}\, K(t,\vec{p}',n')\, \underbrace{\Delta_\pi(\vec{p},\vec{p}')\,\delta(p_0-p_0')}_{\Delta_\pi^0(\vec{p},\vec{p}')}$$
$$\times \underbrace{\prod_{j=0}^{n-1} \overline{R(p_j-p_{j+1})}\,\overline{\hat{\psi}_0}(p_n)}_{\overline{F(\vec{p},n)}}\cdot \underbrace{\prod_{j=0}^{n'-1} R(p_j'-p_{j+1}')\,\hat{\psi}_0(p_{n'}')}_{F(\vec{p}',\pi')}$$

On a une estimation a priori (plus faible)

Lemme 4.1: Pour $\pi \in \Pi_{n,n'}$

$$|C_\pi| \leqslant (C\lambda^2 t)^{\bar{n}} \cdot (\log t)^{\bar{n}+2}$$

[preuve]:

$$|C_\pi| \leq C \lambda^{2\bar{n}} \int d\vec{p}_n d\vec{p}'_{n'} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta$$

$$\times \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\left|\alpha - \frac{p_j^2}{2} + \frac{i}{t}\right|} \prod_{j=0}^{n'} \frac{1}{\left|\beta - \frac{p_j'^2}{2} + \frac{i}{t}\right|}$$

$$\times \Delta_\pi^{0}(\vec{p}, \vec{p}') \, |F(\vec{p}, n)| \, |F(\vec{p}', n')| .$$

En gros, $|F|$ contrôle les moments à ∞.

- pour les B-moments, sauf que $w_{2\bar{n}+1}$: on les contrôle en L^∞. $\sim \mathcal{O}(t^{\bar{n}})$
- pour les A-moments sauf que w_0. on les contrôle en L^1 $\sim \mathcal{O}((\log t)^{\bar{n}})$

$\rightsquigarrow$ taille typique $\mathcal{O}((\lambda^2 t)^{\bar{n}} (\log t)^{\bar{n}})$.

→ Il faut gérer l'intégral en α, β. ⚠

On note $\alpha_j = \alpha$. $0 \leq j \leq n$, $\alpha_j = \beta$ $n < j \leq n+n'$.

- $a_1 = 0 < a_2 < \cdots < a_{\bar{n}+1}$, w_{a}, A-moments

- $$|F(\vec{p}, n)|\,|F(\vec{p}', n')| \leq \frac{C^{\bar{n}}\,|\Phi(w_0)|\,|\Phi(w_{2\bar{n}+1})|}{\langle w_0\rangle^{2d}\langle w_{k_1}\rangle^{2d}\langle w_{k_2}\rangle^{2d}} \prod_{\ell=2}^{\bar{n}+1} \langle w_{a_\ell} - w_{a_{\ell+1}}\rangle^{-2d}$$

où $\Phi \in L^2$.

k_1, k_2 t.q. $\alpha_{k_1} = \alpha$, $\alpha_{k_2} = \beta$.

$$|C_n| \leq (C\lambda^2)^{\bar{n}} \iint d\alpha\, d\beta \int \frac{|\Phi(w_0)|^2\, dw_0\, dw_{A\setminus\{0\}}}{\langle w_0\rangle^{2d}\langle w_{k_1}\rangle^{2d}\langle w_{k_2}\rangle^{2d}\left|\alpha - \frac{w_0^2}{2} + \frac{i}{t}\right| \cdots \left|\beta - \frac{w_0^2}{2} + \frac{i}{t}\right|}$$

$$\times \prod_{\ell=2}^{\bar{n}+1} \frac{1}{\left|\alpha_{a_\ell} - \frac{w_{a_\ell}^2}{2} + \frac{i}{t}\right| \langle w_{a_\ell} - w_{a_{\ell-1}}\rangle^{2d}} \qquad \int \frac{dw_{a_\ell}}{\langle w_{a_\ell} - w_{a_{\ell+1}}\rangle^{2d}\left|\alpha_{a_\ell} - \frac{w_{a_\ell}^2}{2} + \frac{i}{t}\right|} \leq O(\log t)$$

$$\times \underbrace{\prod_{\substack{j \in B \\ j \neq 2\bar{n}+1}} \frac{1}{\left|\alpha_j - \frac{w_j^2}{2} + \frac{i}{t}\right|}}_{\leq O(t^{\bar{n}})}$$

- si k_1 ou $k_2 \in B$. $\displaystyle \sup_{w_j} \frac{1}{\langle w_j\rangle^{2d}\left|\alpha_j - \frac{w_j^2}{2} + \frac{i}{t}\right|} \leq \frac{Ct}{\langle \alpha_j\rangle}$

- Si k_1 ou $k_2 \in B$. $\displaystyle \sup_{a_{\ell-1}} \int \frac{dw_{k_j}}{\langle w_{k_j}\rangle^{2d}\left|\alpha_{k_j} - \frac{w_{k_j}^2}{2} + \frac{i}{t}\right| \langle w_{k_j} - w_{a_{\ell+1}}\rangle^{2d}}$

$$\leq \frac{C \log t}{\langle \alpha_{k_j}\rangle}$$

$$\Rightarrow |C_\pi| \leq (C\lambda^2 t)^{\bar{n}} (\log t)^{\bar{n}}$$

$$\times \underbrace{\iint \frac{|\Phi(w_0)|^2 \, dw_0 \, d\alpha \, d\beta}{\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle \left|\alpha - \frac{w_0^2}{2} + \frac{i}{t}\right| \left|\beta - \frac{w_0^2}{2} + \frac{i}{t}\right|}}_{\leq \mathcal{O}((\log t)^2) \|\Phi\|_{L^2}^2}$$

$\boxed{\text{cqfd}}$

Rq : <u>Amélioration est possible</u> :

- Si π est croisé ou imbriqué, on gagne $\mathcal{O}(\frac{1}{t})$ modulo $(\log t)$.

- Si π est simple, on peut gagner la perte $(\log t)^{\bar{n}+2}$ ainsi que $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/2}$.

$$\frac{1}{n!} \rightsquigarrow \quad |K(t, \vec{p}, n)| \leq \frac{t^n}{n!} \quad \text{(trivial)}$$

$\rightsquigarrow$ On a besoin de choisir n_0. t.q.

$$n_0! \ll t.$$

- Une autre contrainte sur n_0 vient de l'estimation du reste $\mathcal{I}_{n_0}(t)$.

Lemme 4.2. Si $\pi \in \Pi_{n,n'}$ est croisé, alors

$$|C_\pi| \leq (C\lambda^2 t)^{\bar{n}} (\log t)^{\bar{n}+3} \cdot \frac{1}{t}.$$

Lemme 4.3. Si $\pi \in \Pi_{n,n'}$ est imbriqué, alors

$$|C_\pi| \leq (C\lambda^2 t)^{\bar{n}} (\log t)^{\bar{n}+2} \cdot \frac{1}{t}.$$

Lemme 4.4. Si π est simple, on a. $\forall 0<a<1$

$$|C_\pi| \leq \frac{(C_a \lambda^2 t)^{\bar{n}}}{(\bar{n}!)^{a/2}} + O\left((C_a \lambda^2 t)^{\bar{n}} t^{-\frac{a}{2}}\right)$$

[Esquiss de la preuve du Lemme 4.2, Lemme 4.3]:

• 1) Si π est non croisé. par théorème de classification, il existe au moins une fonct. delta.

$$\delta(w_{j_0} \pm w_{\ell_1} \pm w_{\ell_2} \pm \cdots), \text{ avec } j_0 \in B,\ j_0 \neq 2\bar{n}+1.$$

par rapport à l'estimation apriori. on peut sauver une L^∞ : L'argument précédent:

$$\cdot \int \frac{dw_{\ell_1}\, dw_{\ell_2}}{\langle w_{\ell_1}\rangle^{2d} \langle w_{\ell_2}\rangle^{2d} \left|\alpha_{\ell_1} - \frac{w_{\ell_1}^2}{2} + \frac{i}{t}\right| \left|\alpha_{\ell_2} - \frac{w_{\ell_2}^2}{2} + \frac{i}{t}\right|} \lesssim (\log t)^2$$

, $\sup\limits_{w_{j_0}} \dfrac{1}{\left|\alpha_{j_0} - \frac{w_{j_0}^2}{2} + \frac{i}{t}\right|} \lesssim t$

maintenant, lorsque on intègre w_{ℓ_1}, w_{ℓ_2}, on n'a pas besoin de perdre $L^\infty_{w_{j_0}}$:

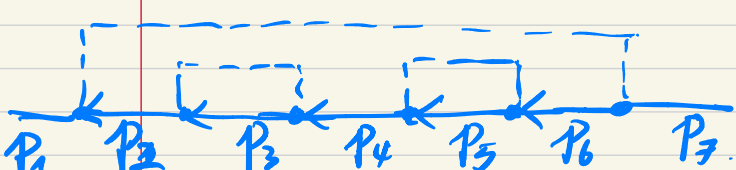
En effet, on a

$$\sup_{\alpha,\beta,v} \iiint \frac{dw_{\ell_1}\, dw_{\ell_2}}{\langle w_{\ell_1}\rangle^{2d}\langle w_{\ell_2}\rangle^{2d} \left|\alpha_{\ell_1} - \frac{w_{\ell_1}^2}{2}+\frac{i}{t}\right|\left|\alpha_{\ell_2}-\frac{w_{\ell_2}^2}{2}+\frac{i}{t}\right|\left|\alpha_{j_0} - \frac{|\pm w_{\ell_1}\pm w_{\ell_2}+v|^2}{2}+\frac{i}{t}\right|}$$

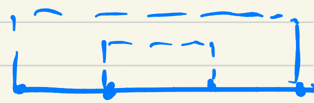
$$\lesssim (\log t)^3.$$

$\leadsto$ on gagne $O(\frac{1}{t}\cdot \log t)$

2) Si x est imbriqué, on selecte un réseau minimal



ou



· P_3, P_5 n'est pas dans $\Delta_x(\vec{p},\vec{p}')$.

· identification $\delta(P_2-P_4)\cdot\delta(P_4-P_6)\cdots$

$\Rightarrow$ factorisation (clé):

$$\Delta_x(\vec{p},\vec{p}') = \tilde{\Delta}_x(\vec{p}^*,\vec{p}')\cdot \underbrace{\delta(P_2-P_4)\,\delta(P_4-P_6)}$$

$\vec{p}^* = \{p_j : j \neq 2, 4, 6\}$ qui dépend de moments à l'extérieur de réseau minimal.

et il y a (dans cet exemple) $3-1=2$ B-moments dans le réseau.

$\Rightarrow$ Il y a en total $\bar{n}-2$ B-moments $\setminus \{w_{2n+1}\}$ en dehors du réseau,

· on suppose p_2 est A-moment
p_4, p_6 sont B-moments :

Astuce :

$$C_\pi = \lambda^{2\bar{n}} \int d\vec{p}_{n'}' \, d\vec{p}^* dp_2 \; \bar{K}(t, \vec{p}^*, p_2, p_2, p_2) \, K(t, \vec{p}', n') \, \Delta_\pi^0(\vec{p}, \vec{p}')$$

$$\underbrace{\cdot \, \bar{F}(\vec{p}, n) \, F(\vec{p}', n')}_{E(\vec{p}^*, \vec{p}', p_2)}$$

$$= \lambda^{2\bar{n}} \int d\vec{p}^* dp_2 \, d\vec{p}' \int_0^t \frac{i^3 s^2}{2!} e^{\frac{is p_2^2}{2}} \, \overline{K(t-s, \vec{p}^*)} \, K(t, \vec{p}', n')$$

$$\cdot \, \tilde{\Delta}_\pi(\vec{p}^*, \vec{p}') \, E(\vec{p}^*, \vec{p}', p_2)$$

Intégration par parties en p_2 :

$$\int \frac{s^2}{2} e^{\frac{is p_2^2}{2}} E(\vec{p}^*, \vec{p}', p_2) \, dp_2$$

$$= \int_0^\infty \rho^{\frac{d}{2}-1} \cdot \frac{s^2}{2} e^{\frac{is\rho}{2}} d\rho \cdot \left(\int_{p_2^2=\rho} E(\vec{p}^*, \vec{p}', p_2)\, d\sigma \right)$$

$$K(t, \vec{p}^*, \underbrace{q_1 \cdots q_\nu}_{\nu}) = (-i)^\nu \int_0^t ds \cdot \frac{s^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\frac{isq^2}{2}} K(t-s, \vec{p}^*)$$

$$= \frac{2}{i} \int_0^\infty \frac{s}{2}\, \partial_\rho \left(e^{\frac{is\rho}{2}}\right) \cdot \rho^{\frac{d}{2}-1} \left(\int_{p_2^2=\rho} E(\cdots)\, d\sigma \right) d\rho$$

$$= -\frac{s}{i} \int_0^\infty e^{\frac{is\rho}{2}}\, \partial_\rho \left(\rho^{\frac{d}{2}-1} \int_{p_2^2=\rho} E(\cdots)\, d\sigma \right) \cdot d\rho$$

$$= \int s\, e^{\frac{isp_2^2}{2}} H(\vec{p}^*, \vec{p}', p_2)\, dp_2$$, gagne une puissance

$d \geq 3$. $H(\vec{p}^*, \vec{p}', p_2) \sim |F(\vec{p}, n)||F(\vec{p}', n')|$ 1 variables moins.

$$\Rightarrow C_\pi = \frac{i\lambda^{2n}}{2} \int d\vec{p}_n^* d\vec{p}'_{n'} dp_2\, \underbrace{\overline{K(t, \vec{p}^*, p_2, p_2)}}\, K(t, \vec{p}, n')$$

$$\sim \tilde{\Delta}_n(\vec{p}^*, \vec{p}') \cdot H(\vec{p}^*, \vec{p}', p_2)$$

⇝ On gagne un dénominateur $\dfrac{1}{\left|\alpha_2 - \frac{p_2^2}{2} + \frac{i}{t}\right|}$

par rappor à l'estimation apriori $\boxed{\text{tc}}$