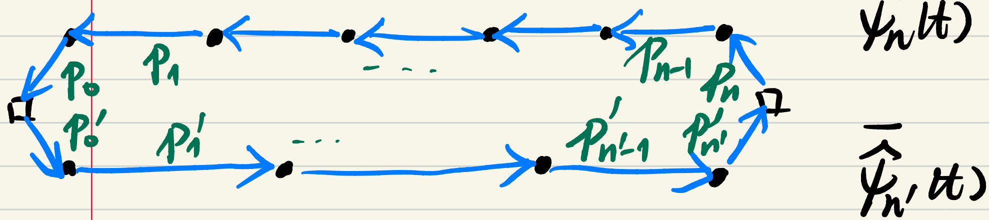
§3. La structure de Δ_π

Etant donné $\pi \in \Pi_{n,n'}$, on l'associe un graphe $G = G_\pi$ de la manière suivante:

1) On dispose $n+n'$ sommets rondes réparties en 2 lignes qui représent les potentiels.

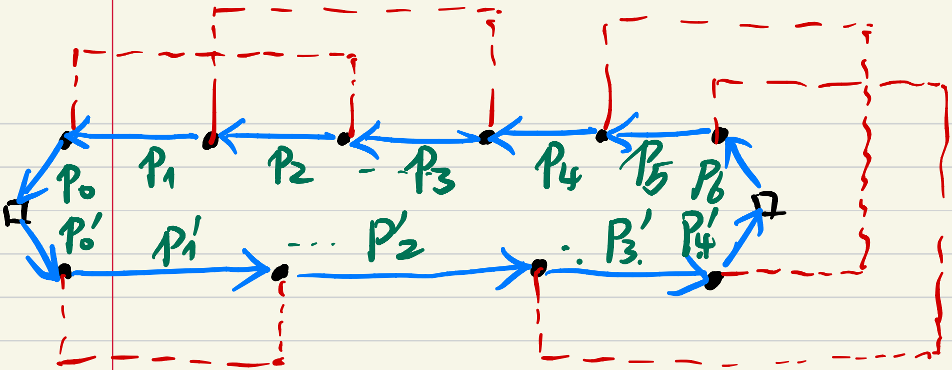


2) On rejoint ces sommets rondes par les flèches réprésentant les moments $P_1, \cdots, P_{n-1}$, $P_1', \cdots, P_{n'-1}'$.

3) On dispose 2 sommets carées qui connectent P_0, P_0', P_n, P_n' pour les variables entrées et sorties.

On a un graphe circulaire orienté, noté C_π.

4) Lignes de "pairing": Les fonctions delta sont réprésentées par les lignes pointillés non orientés à l'extérieur de C_π entre 2 sommets rondes.



Les éléments □, •, ←, --- forment un graphe G_n

__Exemple__ :

Type I $\left[\begin{array}{l} \delta(-P_0+P_1-P_2+P_3)\,\delta(-P_1+P_2-P_3+P_4) \\ \cdot\,\delta(P_0'-P_1'+P_1'-P_2') \end{array} \right.$

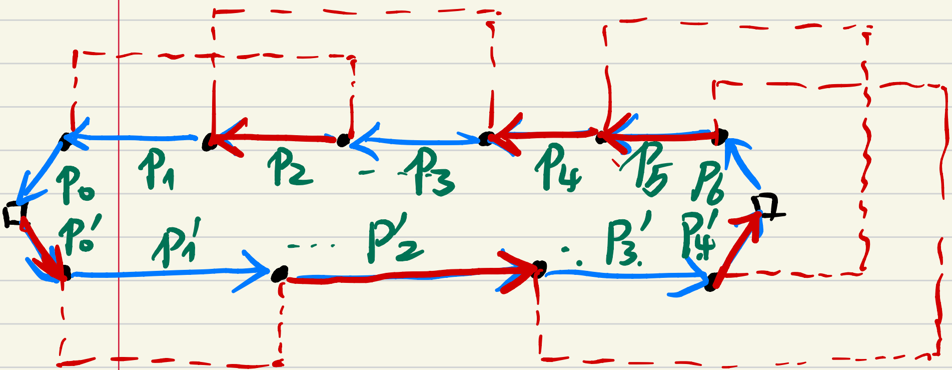
Type II $\cdot\ \delta(-P_4+P_5+P_3'-P_4')\,\delta(-P_5+P_6+P_2'-P_3')$

- La signe de P_i, P_j' correspond à l'orientation dans le graphe.

- Δ_n est déterminé par un système linéaire. Il faudra choisir une base de moments libres (pour exclure les relations redondantes dans Δ_n)

__Idée__ : utiliser un arbre couvrant de G_n et selecter les moments indépendants à partir d'une feuille.

Déf: un arbre couvrant T de G_n est complet, s'il contient $e(P'_{n'})$ et toutes les lignes de "pairing" mais pas $e(P_n)$



Ex: Les arêtes rouges avec les sommets associés forment un arbre complet.

Fait:
Les moments qui ne sont pas dans T forment une base:

- Notation: $w_i := P_{n-i}$, $0 \le i \le n$. $w_{n+j+1} = P'_j$, $0 \le j \le n'$.

Déf: $A = \{ i : w_i \in E(C_n) \setminus E(T) \}$.
$B = \{ j : w_j \in E(C_n) \cap E(T) \}$.

Lemme: (Base des moments)

1) $\cdot$ $\# A = \# B = \bar{n}+1 = \frac{n+n'}{2}+1$.

2) $\forall$ B-moment w_j, $j \in B$.

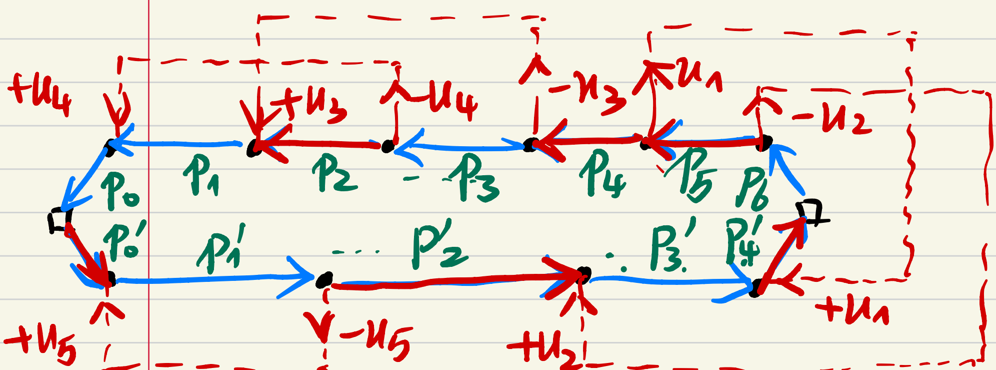
$$w_j = \sum_{\ell \in A} a_{j\ell}\, w_\ell. \qquad a_{j\ell} = 0, +1, -1.$$

$$\text{et } \sum_{\ell \in A} a_{j\ell} = 1.$$

La preuve de cette lemme repose sur un algorithm:

- Donner une orientation pour chaque ligne de "pairing" vérifiant la condition de Kirchhoff:

$$\sum_{e_j \sim i} \pm u(e_j) = 0.$$



• **Algorithme** : a) choisir une feuille de T ;

b) utiliser la condition Kirchhoff à cette feuille $\Rightarrow$ on connaît le moment B connecté à cette feuille.

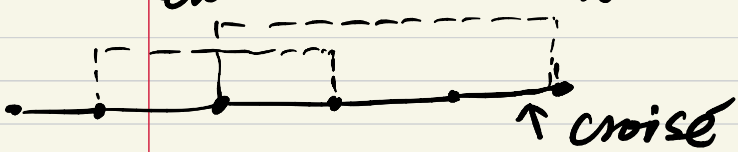
c) Couper cette feuille et le moment B dans T pour former un nouveau arbre T'.

• $\rightarrow$ **Classification des graphes**

Type A : <u>π croisé</u> : $\exists\ i<k<j<l$ et

$$\delta(w_i - w_{i+1} + w_j - w_{j+1})$$
$$\delta(w_k - w_{k+1} + w_l - w_{l+1}) \quad \text{dans } \Delta_\pi$$

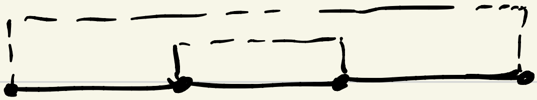
<u>i.e.</u> : π est croisé si il n'est pas possible de placer toutes les lignes de "pairing" en dehors de C_π sans croisement.



Type B : π imbriqué ("nested") :

• π est non croisé

• $\exists$ deux lignes de "pairing" de Type I ou Type I' telle que l'une soit à l'intérieur de l'autre.

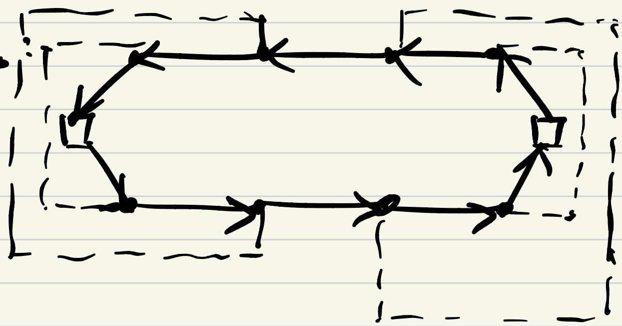


↑ imbriqué.

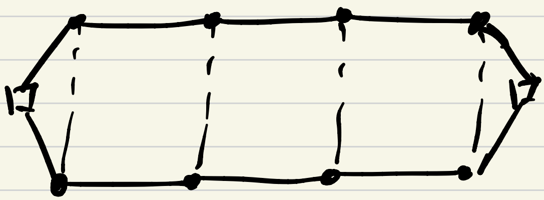
Type C : π simple : (responsable de termes principaux)

- non croisé
- non-imbriqué

Exemple : Simple.



$\cong$



"ladder graph"

Lemme. (caractérisation des graphes non croisés)

$\pi \in \Pi_{n,n'}$ est non croisé ssi pour tout arbre couvrant complet T de G_π, il y a une application $L : \underset{(B\text{-moment})}{E(C_\pi) \cap E(T)} \to \underset{(A\text{-moment})}{E(G_\pi) \setminus E(T)}$

telle que $L(e(w_{2\bar{n}+1})) = e(w_0)$, $\Delta_\pi = \prod_{e \in E(C) \cap E(T)} \delta(w(e) - w(L(e)))$

<u>Rq</u> : Cette caractérisation sera utilisée dans l'estimation L^2 pour π non-simple.