Dérivation de l'équation de Boltzmann linéaire :

D'après Erdős-Yau :

(I.)

13/03/2025

§1. L'équation de Schrödinger aléatoire

- modèle microscopique :

(RSE) $$i\partial_t \psi^\omega(t) = \left(-\frac{1}{2}\Delta_x + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mathcal{V}^\omega(x)\right)\psi^\omega(t)$$

$\mathcal{V}^\omega(x) \in \mathbb{R}$, gaussienne : $\mathbb{E}[\mathcal{V}^\omega(x)] = 0$

$$\mathbb{E}[\mathcal{V}^\omega(x)\mathcal{V}^\omega(x')] = G(x-x'),\ \hat{G} \geq 0.$$

$$\mathbb{E}[\hat{\mathcal{V}}^\omega(p)\hat{\mathcal{V}}^\omega(q)] = \delta(p+q)R(p)R(q)$$

$$\mathbb{E}[\hat{\mathcal{V}}^\omega(p)\overline{\hat{\mathcal{V}}^\omega(q)}] = \delta(p-q)R(p)R(q)$$

où $R = \sqrt{\hat{G}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

- changement d'échelle :

variable macro. $(X, T, V) = (\varepsilon x, \varepsilon t, v)$

obj : Dynamique effective (macroscopique) sur l'espace de phase : $|x| = O(\frac{1}{\varepsilon})$, $|t| = O(\frac{1}{\varepsilon})$

$|v| = O(1)$

$\varepsilon \to 0^+$

· Transformation de Wigner

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad W_\psi(x,v) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot v} \psi\left(x+\frac{y}{2}\right) \overline{\psi}\left(x-\frac{y}{2}\right) dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x} \widehat{\psi}\left(v+\frac{\xi}{2}\right) \overline{\widehat{\psi}}\left(v-\frac{\xi}{2}\right) d\xi$$

changement d'échelle.

$$W_\psi^\varepsilon(X,V) = \frac{1}{\varepsilon^d} W_\psi\left(\frac{X}{\varepsilon}, V\right).$$

$$\left\langle W_\psi^\varepsilon(X,V),\ a(X,V) \right\rangle_{L^2} = \left\langle a^w(\varepsilon x, D_x)\psi, \psi \right\rangle_{L^2}$$

On veut comprendre la distribution de Wigner (en moyenne

$$\mathcal{O}_t^\varepsilon(J) := \mathbb{E}\left[\left\langle W^\varepsilon_{\psi^\omega(t)}(X,V),\ J(X,V) \right\rangle_{L^2} \right]$$

$$= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \overline{J(X,V)}\, W^\varepsilon_{\psi^\omega(t)}(X,V)\, dX\, dV.$$

où $\psi^\omega(t)$ sol. de (RSE)., $J \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$

·Résultat principal: $\underline{d \geq 3}$, $\psi_\varepsilon(0) = \varepsilon^{\frac{d}{2}} h(\varepsilon x) \exp\left(\frac{iS(\varepsilon x)}{\varepsilon}\right)$

$h \in \mathcal{S}$, $S \in \mathcal{S}$

$$W^\varepsilon_{\psi_\varepsilon(0)} \longrightarrow |h(X)|^2 \delta(V - \nabla S(X)) =: F_0(X,V)$$

On a $\| \widehat{\psi}_\varepsilon(p) \langle p \rangle^{2\alpha d} \|_{L^2} \leq C$. uniformément en ε.

Thm. (Erdős-Yau). $\forall\ J \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$

$$\mathcal{O}^{\varepsilon}_{\frac{T}{\varepsilon}}(J) := \mathbb{E} \iint \overline{J(X,V)}\, W^{\varepsilon}_{\psi^{\omega}(\frac{T}{\varepsilon})}(X,V)\, dX\, dV \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \iint F_T(X,V)\, \overline{J(X,V)}\, dX\, dV.$$

où $F_T(X,V)$ est la solution de Boltzmann linéaire.

$$(\text{LBol}): \left[\begin{aligned} \partial_T F_T + V \cdot \nabla_X F &= \int \sigma(U,V) F_T(X,U)\, dU \\ &\quad - \int \sigma(U,V) F_T(X,V)\, dV. \end{aligned} \right.$$

où $\sigma(U,V) = 4\pi \hat{R}^2 (U-V)\, \delta(U^2 - V^2)$

$$\Phi^V_T(X) = X - TV, \quad \sigma_0(V) = \int \sigma(U,V)\, dU$$

$$\begin{aligned} F_T(X,V) &= e^{-T\sigma_0(V)} F_0(\Phi^V_T(X), V) \\ &\quad + e^{-T\sigma_0(V)} \int_0^T d\tau \int dU \cdot \sigma(U,V)\, e^{\tau \sigma_0(V)} F_\tau(\Phi^V_{T-\tau}(X), U) \\ &= \sum_{m \geq 0} e^{-T\sigma_0(V)} \int dV_1 \cdots dV_m \int_0^T \cdots \int_0^T \delta\Big(T - \sum_{j=0}^m \tau_j\Big)\, d\tau_0 \cdots d\tau_m \\ &\quad \times \sigma(V,V_1)\, \sigma(V_1,V_2) \cdots \sigma(V_{m-1}, V_m)\, F_0\Big(X - \sum_{j=0}^m \tau_j V_j,\ V_m\Big) \end{aligned}$$

La série de Dyson pour Boltzmann

§2. La formule de Duhamel

$$H = H_0 + \lambda \mathcal{V}^{\omega}, \qquad \lambda = \varepsilon^{1/2}.$$

$$e^{-itH} = \sum_{n=0}^{\infty} Duh_n(t), \quad \text{où}$$

$$Duh_n(t) = \left(\frac{\lambda}{i}\right)^n \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n+1} dt_0 \cdots dt_n \, \delta(t - \sum_{j=1}^{n} t_j) \, e^{-it_0 H_0} \mathcal{V} e^{-it_1 H_0} \mathcal{V} \cdots \mathcal{V} e^{-it_n H_0}$$

Donc $\displaystyle \psi^{\omega}(t) = \sum_{n=0}^{n_0-1} \psi_n(t) + \Psi_{n_0}(t)$, $\quad n_0 = n_0(\varepsilon) \uparrow \infty$.

$$\psi_n(t) = Duh_n(t)(\psi(0)), \quad \Psi_{n_0}(t) = \frac{\lambda}{i} \int_0^t e^{-i(t-s)H} (\mathcal{V}) \psi_{n_0-1}(s) ds.$$

En Fourier:

$$\hat{\psi}_n(t, p_0) = \left(\frac{\lambda}{i}\right)^n \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n+1} \delta(t - \sum_{j=1}^{n} t_j) dt_0 \cdots dt_n \cdot \int dp_1 \cdots dp_n \prod_{j=0}^{n} e^{-\frac{it_j p_j^2}{2}}$$

$$\times \prod_{j=0}^{n-1} \hat{\mathcal{V}}(p_j - p_{j+1}) \cdot \hat{\psi}_0(p_n)$$

$$=: \lambda^n \int d\vec{p}_{n,\hat{0}} \; K(t, \vec{p}, n) L(\vec{p}, n) \hat{\psi}_0(p_n)$$

où $\displaystyle K(t, \vec{p}, n) = (-i)^n \int_0^t \cdots \int_0^t \delta(t - \sum_{j=0}^{n} t_j) \, dt_0 \cdots dt_n \prod_{j=0}^{n} e^{-\frac{it_j p_j^2}{2}}$

$$L(\vec{p}, n) = \prod_{j=0}^{n-1} \hat{\mathcal{V}}(p_j - p_{j+1}),$$

$$\delta\Big(t-\sum_{j=0}^{n} t_j\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\left(t-\sum_{j=0}^{n} t_j\right)}\, d\alpha ,$$

$$\Rightarrow$$

$$K(t,\vec{p},n) = \Big(\frac{-i}{2\pi}\Big)^{n} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\alpha t} \underbrace{\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}}_{n+1} \prod_{j=0}^{n} e^{\frac{it_j}{2}(p_j^2-2\alpha-2i\eta)}\, dt_j$$

$$\times e^{t\eta}$$

$$= \frac{i e^{t\eta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-i\alpha t} \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\alpha - \frac{p_j^2}{2} + i\eta}, \quad \forall \eta > 0$$

· <u>Schéma de la dérivation</u> :

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{M-1} \psi_n(t) + \underbrace{\sum_{n=M}^{n_0-1} \psi_n(t) + \Psi_{n_0}(t)}_{\text{reste}}$$

$$n_0 = n_0(\varepsilon) = \frac{\gamma\,|\log\varepsilon|}{\log|\log\varepsilon|}.$$

$$\psi_M^{main}(t) = \sum_{n=0}^{M-1} \psi_n(t),$$

<u>Le but</u> : 1) $\lim\limits_{M\to\infty}\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\Big\|\sum_{n=M}^{n_0-1}\psi_n(t)\Big\|_{L^2}^2 = 0$

$\left(t=\frac{T}{\varepsilon}\right)$ 2) $\lim\limits_{M\to\infty}\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\|\Psi_{n_0}(t)\|_{L^2}^2 = 0$

3) $\lim\limits_{M\to\infty}\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\Big[W^{\varepsilon}_{\psi_M^{main}(t)}(X,V)\Big] = F_T(X,V)$, <u>sol. de Boltz.</u>

pour $\underline{3)}$: $\forall J \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, $\hat{J}_\varepsilon(\xi,v) = \frac{1}{\varepsilon^d}\hat{J}(\frac{\xi}{\varepsilon},v)$

$$\mathcal{U}_t^\varepsilon(J) = \mathbb{E}\iint \overline{\hat{J}_\varepsilon}(\xi,v)\hat{W}^\varepsilon_{\psi(t)}(\xi,v)\,d\xi dv$$

$$= \mathbb{E}\iint \overline{\hat{J}_\varepsilon(\xi,v)}\,\overline{\hat{\psi}}(t,\xi-\tfrac{v}{2})\hat{\psi}(t,\xi+\tfrac{v}{2})d\xi dv$$

$\psi \rightsquigarrow \psi_M^{main}$

$$= \sum_{n,n'=0}^{M-1}\iint \overline{\hat{J}_\varepsilon(\xi,v)}d\xi dv\,\mathbb{E}\left[\overline{\hat{\psi}_n}(t,\xi-\tfrac{v}{2})\hat{\psi}_{n'}(t,\xi+\tfrac{v}{2})\right]$$

$$= \sum_{n,n'=0}^{M-1}\iint \overline{\hat{J}_\varepsilon(\xi,v)}d\xi dv\cdot\lambda^{n+n'}\iint d\vec{p}_{n,\hat{0}}\,d\vec{p}'_{n',\hat{0}}\,\overline{K}(t,\vec{p},n)K(t,\vec{p}',n')$$

$$\delta(p_0-\tfrac{v}{2}+\xi)\cdot\delta(p_0'-v-\tfrac{\xi}{2})\,\overline{\hat{\varphi}_0}(p_n)\hat{\varphi}_0(p_n')\,\mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{n-1}\overline{\hat{\vartheta}}(p_j-p_{j+1})\prod_{j=0}^{n'-1}\hat{\vartheta}(p_j'-p_{j+1}')\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{n-1}\overline{\hat{\vartheta}}(p_j-p_{j+1})\prod_{j=0}^{n'-1}\hat{\vartheta}(p_j'-p_{j+1}')\right]$$

$$\underset{\text{Wick}}{=}\prod_{j=0}^{n-1}\overline{R}(p_j-p_{j+1})\prod_{j=0}^{n'-1}R(p_j'-p_{j+1}')\sum_{\pi\in\Pi_{n,n'}}\Delta_\pi(\vec{p},\vec{p}')$$

où $\Delta_\pi(\vec{p},\vec{p}')$ = produit de fonct. delta
par rapport à une "pairing" π :
Il y a 3 types de fonct. delta :

<u>Type I</u> : $\delta(-p_i+p_{i+1}-p_j+p_{j+1})$, $\forall i<j$

<u>Type I'</u> : $\delta(+p'_i-p'_{i+1}+p'_j-p'_{j+1})$, $\forall i<j$.

<u>Type II</u> : $\delta(-p_i+p_{i+1}+p_j-p_{j+1})$, $\forall i.j$.

Pour chaque $\pi\in\Pi_{n,n'}$.

- $n+n'=2\bar{n}\in 2\mathbb{Z}$.
- Pour $0<i<n$. $0<i'<n'$.
  p_i, $p'_{i'}$ apparaissent 2 fois, + et −.
- p'_0, p_n q'une fois +
- p_0, $p'_{n'}$ q'une fois −

- La structure de delta funct. $\Delta_\pi(\vec{p},\vec{p}')$ est déterminée par un graphe $G=G_\pi$.
Parmi ces graphes, ceux dits simple donnent les termes principaux de Boltzman.